Science & Philosophy
Vol. 4(1), 2016, pp. 31--42

ISSN: 2282-7757
eISSN: 2282-7765

Algebraic Hyperstructures and Fuzzy Logic in the Treatment of Uncertainty

Antonio Maturo[1], Annamaria Porreca[2]

[1]Università G. D'Annunzio,
amaturo@unich.it
[2]Laurea Triennale in Economia e Management
annamariaporreca@hotmail.it

Received on: 22-02-2016. **Accepted** on: 25-05-2016. **Published** on: 01-9-2016

Abstract

This study presents some fundamental aspects of recent theories on algebraic Hyperstructures, an important tool for an interdisciplinary vision of Geometry and Algebra. We examine some hypergroupoids of events, useful for a new algebraic-geometry perspective in the study and issues of probability applications. This paper considers some fundamental aspects of fuzzy classifications and their applications to problems of evaluation and decision in Architecture and Economics. Finally, we present hypergroups and join space associated with these classifications.

Keywords: Algebraic Hyperstructures, Fuzzy logic, Applications for Architecture and Economics.

Sunto

Si presentano alcuni aspetti fondamentali della relativamente recente teoria delle iperstrutture algebriche, importante strumento per una visione interdisciplinare di Geometria e Algebra. Si esaminano alcuni ipergruppoidi di eventi, utili per un nuovo punto di vista algebrico - geometrico nello studio e nelle applicazioni di alcune questioni di probabilità. Si considerano alcuni aspetti fondamentali delle classificazioni fuzzy e le loro applicazioni a problemi di valutazione e

decisione in Architettura e in Economia. Si presentano infine ipergruppi e join space associati a tali classificazioni.
Parole Chiave: Iperstrutture algebriche. Logica fuzzy. Applicazioni a Architettura e Economia.

1. Storia e fondamenti della teoria delle iperstrutture algebriche

La teoria delle iperstrutture ha origine da un lavoro di Marty (1934), e si è sviluppata soprattutto negli ultimi 40 anni. L'iperstruttura più studiata è l'ipergruppo, che generalizza il concetto di gruppo.
Nel libro "Prolegomena of hypergroup theory" (Corsini 1993) sono esposti tutti i risultati fondamentali sulla teoria degli ipergruppi fino al 1992. In appendice è riportata una bibliografia completa. Una rassegna dei risultati fino al 2003 è in (Corsini, Leoreanu 2003).

Forse la spinta più importante per lo studio delle iperstrutture algebriche è venuta dal testo fondamentale "Join Geometries" di Prenowitz e Jantosciak, (1979), che, oltre a dare una impostazione originale e generale allo studio della Geometria, introduce ad una visione interdisciplinare di Geometria e Algebra, mostrando come lo studio della Geometria Euclidea può essere ricondotto a quello di un particolare ipergruppo commutativo soddisfacente ad un particolare assioma detto "*proprietà di incidenza*". Anche varie altre geometrie, come la Geometria Proiettiva, si possono ricondurre ad ipergruppi commutativi con la proprietà di incidenza.

L'idea di studiare le applicazioni degli ipergruppi al trattamento dell'incertezza ed ai problemi di decisione in Architettura e nelle Scienze Sociali nasce in seguito ad una serie di conferenze tenute presso la Facoltà di Architettura di Pescara da Giuseppe Tallini nel 1993 sugli ipergruppi visti da un punto di vista geometrico e si sviluppa in vari convegni AHA (Algebraic Hyperstructures and Applications) oltre a vari seminari e convegni locali con Piergiulio Corsini dal 1994 al 2014. Ad esempio, nel dicembre 1994 e nell'ottobre 1995 sono stati organizzati da Corsini, Eugeni e Maturo, rispettivamente a Chieti ed a Pescara due convegni su "Hyperstructures and their Applications in Criptography, Geometry and Uncertainty Treatment", con i quali è stato avviato lo studio sistematico delle applicazioni delle iperstrutture al trattamento dell'incertezza e all'Architettura.

Richiamiamo ora brevemente alcune definizioni fondamentali sulle iperstrutture algebriche.

Definizione 1.1 Sia Ω un insieme non vuoto. Diciamo *iperoperazione* su Ω ogni funzione $\sigma: \Omega\times\Omega \to \wp(\Omega)-\{\emptyset\}$ che ad ogni coppia (a, b) di elementi di Ω associa un sottoinsieme non vuoto di Ω, detto *iperprodotto* di a e b ed indicato con $a\sigma b$. La coppia (Ω, σ) formata da Ω e da una iperoperazione su Ω si dice *ipergruppoide*.

Un ipergruppoide (Ω, σ) si dice *commutativo* se $\forall a,b\in\Omega$, $a\sigma b = b\sigma a$, si dice *debolmente commutativo* se, $\forall a,b\in\Omega$, $a\sigma b \cap b\sigma a \neq \emptyset$.
Se A e B sono sottoinsiemi di Ω l'unione degli insiemi $a\sigma b$, $a\in A$, $b\in B$, si indica con $A\sigma B$. Si pone inoltre, $\forall a\in\Omega$, $B\subseteq\Omega$, $a\sigma B = \{a\}\sigma B$, $B\sigma a = B\sigma\{a\}$.

Da un punto di vista geometrico l'iperprodotto $a\sigma b$ si dice *blocco di ordine 2* generato da (a, b). I punti di Ω si dicono anche *blocchi di ordine 1*.

Se (Ω, σ) è commutativo allora, per a diverso da b, $a\sigma b$ in vari contesti si può interpretare come un segmento di estremi a e b, in altri casi come una retta passante per a e b.

Se (a,b,c) è una terna ordinata di elementi di Ω possiamo considerare gli "*iperprodotti tripli*" $(a\sigma b)\sigma c$ e $a\sigma(b\sigma c)$. Possono verificarsi tre casi

(1) $\forall a,b,c\in\Omega$, $(a\sigma b)\sigma c = a\sigma(b\sigma c)$;
(2) $\forall a,b,c\in\Omega$, $(a\sigma b)\sigma c \cap a\sigma(b\sigma c) \neq \emptyset$;
(3) $\exists a,b,c\in\Omega$: $(a\sigma b)\sigma c \cap a\sigma(b\sigma c) = \emptyset$.

Se vale (1) (Ω, σ) si dice *ipergruppoide associativo* o *semipergruppo*, se vale (2) si dice *ipergruppoide debolmente associativo*.

Da un punto di vista geometrico gli iperprodotti tripli $(a\sigma b)\sigma c$ e $a\sigma(b\sigma c)$ si dicono *blocchi di ordine 3* generati da (a, b, c).

Se (Ω, σ) è commutativo e associativo allora esiste un unico blocco di ordine 3 generato da (a, b, c), indicato con $a\sigma b\sigma c$. Esso, se non si riduce ad un blocco di ordine 2, in vari contesti si può interpretare, a seconda del contesto, come il triangolo di estremi a, b, c o come il piano per tali punti.

Definizione 1.2 Un ipergruppoide (Ω, σ) si dice *quasipergruppo* se
$$\forall a, b\in\Omega, \exists x, y\in\Omega: b\in a\sigma x \cap y\sigma a.$$

Si dice, inoltre, che (Ω, σ) è un *ipergruppo* se è sia un semipergruppo che un quasipergruppo.

In un ipergruppo commutativo è definita "in maniera naturale" la *iperdivisione* "/" ponendo, $\forall a, b\in\Omega$, $b/a = \{x\in\Omega: b\in a\sigma x\}$. Il blocco b/a ha anche notevoli significati geometrici. Se $a\sigma b$ è il segmento di estremi a e b allora b/a è la semiretta di origine b non contenente a.

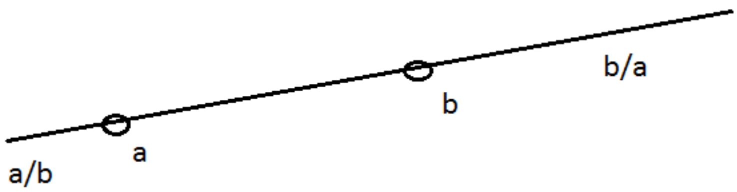

Figura 1 Segmento e semirette

Definizione 1.3 Sia (Ω, σ) un ipergruppo commutativo. Esso si dice

- *aperto* se $\forall a,b\in\Omega$, $a\neq b$, $a\bullet b\cap\{a, b\}=\emptyset$;
- *chiuso* se $\forall a,b\in\Omega$, $a\bullet b\supseteq\{a, b\}$;
- *geometrico* se $\forall a\in\Omega$, $a\bullet a = \{a\} = a/a$;
- *join space* se vale la seguente *proprietà di incidenza*:

$$\forall a, b, c, d \in\Omega,\ a/b\cap c/d\neq\emptyset\Rightarrow a\bullet d\cap b\bullet c\neq\emptyset.$$

Se le semirette a/b e c/d hanno un punto in comune anche i segmenti $a\bullet d$ e $b\bullet c$ hanno un punto in comune.
Gli ipergruppi studiati in (Prenowitz, Jantosciak 1979), per la costruzione della Geometria Euclidea sono precisamente join spaces aperti e geometrici.

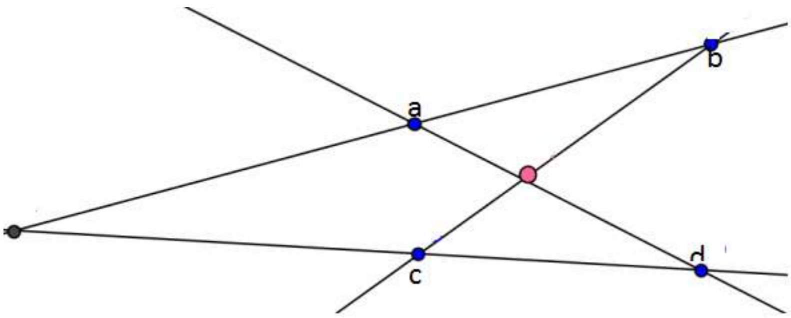

Figura 2 La proprietà di incidenza

2. Iperstrutture algebriche di eventi

Mostriamo come alcune operazioni fra eventi e alcuni concetti come quello di evento condizionato possono essere inquadrati nell'ambito della teoria delle iperstrutture algebriche.

Iperstruttura dei costituenti (o atomi)

Soprattutto nella impostazione soggettiva della probabilità e, più recentemente, nei modelli matematici per la conoscenza parziale nell'intelligenza artificiale, ha una notevole rilevanza il concetto di *costituente* o *atomo*). Per ogni evento E, indichiamo con \E o con E^c il contrario di E. Indichiamo, inoltre, con $\emptyset$ l'evento impossibile e con Ω l'evento certo.

Definizione 2.1 (**Atomi**) Sia $\mathbf{F} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Si dicono *costituenti* o *atomi* associati a **F** tutti gli eventi non impossibili del tipo $A_1\cap A_2\cap \ldots\cap A_n$, con $A_i\in\{E_i, E_i^c\}$.

Indichiamo con At(**F**) la famiglia degli atomi associati a **F**. Si può verificare che At(**F**) è individuato dalle seguenti proprietà caratteristiche:

(1) At(**F**) è una partizione dell'evento certo Ω;

(2) $E \in \mathbf{F}-\{\varnothing\} \Rightarrow E$ è una unione di elementi di At(**F**);

(3) se Π è una partizione di Ω tale che ($E \in \mathbf{F}-\{\varnothing\} \Rightarrow E$ è una unione di elementi di Π) allora ($a \in At(\mathbf{F}) \Rightarrow a$ è una unione di elementi di Π).

In alcuni lavori del nostro gruppo di ricerca (Doria, Maturo, 1995; 1996; Maturo 1997a, 1997b, 1997c) sono state introdotte e studiate iperstrutture di eventi.

In particolare si è introdotta la iperstruttura algebrica (F, σ), detta *iperstruttura degli atomi*, con F algebra di eventi e σ definita come la iperoperazione:

$$\sigma: (A, B) \in \mathbf{F} \rightarrow At\{A, B\}. \tag{2.1}$$

Seguendo le definizioni considerate in (de Finetti 1970; Maturo 1997a, 1997b, 1997c) un evento condizionato A/B (con B evento non impossibile) è un ente logico a 3 valori: *vero* se si verifica $A \cap B$, *falso* se si verifica $A^c \cap B$ e *indeterminato* se si verifica B^c.

Allora un evento condizionato è individuato perfettamente dall'insieme $\{A \cap B, B\}$. Se $A \cap B = B$ tale insieme si riduce ad un singleton e l'evento condizionato non è mai falso. Se $A = \varnothing$ non è mai vero; se $B = \Omega$ non è mai indeterminato e si identifica con l'evento A.

Attribuiamo il significato di evento *totalmente indeterminato* al caso in cui $B = \varnothing$ e quindi $\{A \cap B, B\} = \{\varnothing\}$. Allora, data un'algebra di eventi **F**, gli eventi condizionati associati ad **F** vengono ottenuti con la seguente iperoperazione algebrica:

$$\tau: (A, B) \in \mathbf{F} \rightarrow \{A \cap B, B\}. \tag{2.2}$$

La iperstruttura algebrica (**F**, τ) è detta *iperstruttura degli eventi condizionati* (Doria, Maturo, 1995; 1996; Maturo 1997a, 1997b, 1997c).

Una definizione alternativa, puramente algebrica, di evento condizionato, data nei lavori citati è la seguente:

Definizione 2.2 (**Eventi condizionati in forma algebrica**) Diciamo che la terna di eventi K = (A, B, C) è un *evento condizionato (in forma algebrica)* se valgono le seguenti condizioni

$$A \cup B \cup C = \Omega, \qquad A \cap B = A \cap C = B \cap C = \varnothing.$$

Gli eventi A, B e C si dicono, rispettivamente, *parte vera*, *parte falsa* e *parte indeterminata* di K e si indicano, rispettivamente, con K_A, K_B e K_C.

Usando la notazione usuale $K = A/(A \cup B)$.

Se Π è una partizione di Ω tale che ogni elemento di $\{A, B, C\}-\{\emptyset\}$ è una unione di elementi di Π, se si verifica un elemento $a \in \Pi$ diciamo che K è *vero*, *falso* o *indeterminato*, rispettivamente, se $a \in A$, $a \in B$ o $a \in C$.

Un ulteriore ipergruppoide collegato agli eventi condizionati è il seguente ipergruppoide (**F**, γ), con **F** algebra di eventi e γ la iperoperazione definita da:

$$\gamma: (A, B) \in \mathbf{F} \rightarrow \{A \cap B, \backslash A \cap B, \backslash B\}. \tag{2.3}$$

L'idea alla base delle ricerche sulle iperstrutture (**F**, σ), (**F**, τ), (**F**, γ) introdotte in di (Doria, Maturo, 1995; 1996; Maturo 1997a, 1997b, 1997c) è di studiare come tali iperstrutture possano permettere un trattamento algebrico e geometrico delle teorie basate sui concetti di dipendenza o semidipendenza logica fra famiglie di eventi condizionati e di quelle relative alle assegnazioni di probabilità coerenti su una famiglia di eventi condizionati.

Alcune proprietà algebriche di tali iperstrutture sono:

- I tre ipergruppoidi sono debolmente associativi.
- (**F**, σ) è commutativo e gli altri due sono debolmente commutativi.
- I sottoipergruppoidi di (**F**, σ) sono, a meno di $\emptyset$ e Ω, le sottoalgebre di **F**.
- I blocchi di ordine 2 di (**F**, τ) si possono interpretare come eventi condizionati, per cui i blocchi di ordine superiore a 2 sono una generalizzazione del concetto di evento condizionato.
- Gli iperprodotti $A \gamma B$ individuano insiemi di eventi condizionati a due a due logicamente dipendenti.

3. Fuzzy sets ed iperstrutture in problemi di valutazione in condizioni di incertezza in Architettura ed in Economia

In varie questioni applicative, in particolare in Architettura e in Economia, si presenta un'incertezza di tipo fuzzy, ossia compaiono proposizioni che, in generale, non sono né vere né false ma tali che si possa attribuire una misura del loro "*grado di verità*".

Si tratta di un tipo di incertezza diverso da quello di cui si occupa la probabilità. Infatti, la teoria della probabilità si basa sull'ipotesi che una proposizione debba essere necessariamente vera o falsa, l'incertezza probabilistica dipende dalla non conoscenza, per incompletezza di informazioni, di quale delle due situazioni si verifica e la probabilità è il grado di fiducia del fatto che la proposizione sia vera.

Invece nell'incertezza fuzzy si assume l'ipotesi che una proposizione possa assumere vari valori di verità, in genere si può ritenere che le informazioni siano sufficientemente complete, però la struttura della proposizione porta a dover attribuire un "*valore di verità intermedio*" fra vero e falso.

Inoltre non si possono applicare molti degli usuali ragionamenti perché essi sono basati sulla logica classica a due valori. Ad esempio una proposizione tipica nell'Architettura è P = "la costruzione C è soddisfacente dal punto di vista dell'impatto ambientale", che in genere non può essere valutata del tutto vera o del tutto falsa.

Dovendo confrontare più oggetti si considerano *funzioni enunciative* P(x) che si riducono a proposizioni se ad x si sostituisce un valore c tale che P(c) ha significato. Sia U, detto *insieme universo*, l'insieme dei c tali che P(c) ha senso. In genere, (Fadini, 1979; Bezdek, 1981; Ross, 1999), per ogni $c \in U$, si introduce come valore di verità di P(c) un numero appartenente all'intervallo [0,1] dei numeri reali, crescente al crescere del "*grado di verità*" di P(c), uguale a 0 se P(c) è falso ed uguale ad 1 se P(c) è vero.

La funzione φ_P: $c \in U \rightarrow P(c) \in [0,1]$ si dice *fuzzy set con universo U associato a P(x).*

In Corsini, (1994), viene associato ad ogni fuzzy set φ con universo U un ipergruppoide (U,•) con l'iperoperazione "•" definita come segue

$$\forall a,b \in U,\ a \bullet b = \{z \in U: \min\{\varphi(a), \varphi(b)\} \leq \varphi(z) \leq \max\{\varphi(a), \varphi(b)\}\} \qquad (3.1)$$

e si dimostra che (U,•) è un *join space chiuso*.

Nei problemi di valutazione in Architettura e Urbanistica, se U è l'insieme degli oggetti (ad esempio gli edifici di una città o un insieme di progetti) da valutare a partire da una funzione enunciativa P(x), il primo passo è di individuare

- un insieme S di "*giudizi qualitativi*";
- una relazione d'ordine (non necessariamente totale) $\leq$ su S;
- una funzione α: $U \rightarrow S$, detta *fuzzy set qualitativo con universo U e codominio S*, tale che $\forall c, d \in U$, se si ritiene che P(c) sia meno vero o ugualmente vero rispetto a P(d), si ha $\alpha(c) \leq \alpha(d)$.

Osserviamo che assegnare l'insieme S equivale ad assegnare una relazione di preordine in U. Infatti, se α è un fuzzy set qualitativo con universo U e codominio S, ponendo $\forall c, d \in U$, $c\rho d \Leftrightarrow \alpha(c) \leq \alpha(d)$, si ha una relazione di preordine ρ in U. Viceversa, se ρ è una relazione di preordine in U poniamo, $\forall c, d \in U$, $c \sim d \Leftrightarrow (c\rho d$ e $d\rho c)$. La $\sim$ è una relazione di equivalenza in U. Sia $S = U/\sim$

e sia α la funzione che ad ogni $c \in U$ associa la classe di equivalenza di c. Se poniamo, $\forall c, d \in U$, $\alpha(c) \angle \alpha(d) \Leftrightarrow c \rho d$ la $\angle$ è una relazione d'ordine in S.
Possiamo sempre supporre che S sia dotato di massimo V e minimo F. In caso contrario, se S non ha massimo introduciamo il simbolo V e prolunghiamo la relazione d'ordine a $S \cup \{V\}$ ponendo $a < V$, $\forall a \in S$. Analogamente se S non ha minimo introduciamo il simbolo F e prolunghiamo la relazione d'ordine a $S \cup \{F\}$ ponendo $a > F$, $\forall a \in S$.

Introduciamo la seguente

Definizione 3.1 Sia S un insieme ordinato con minimo F e massimo V. Diciamo *valutazione numerica* su S ogni funzione $v: S \rightarrow [0,1]$ tale che $v(F) = 0$, $v(V)=1$, $\forall z, t \in S, z \leq t \Rightarrow v(z) \leq v(t)$.

Evidentemente, se $\alpha: U \rightarrow S$ è un fuzzy set qualitativo e $v: S \rightarrow [0,1]$ è una valutazione numerica, la funzione composta $\varphi = v \circ \alpha$ è un fuzzy set con universo U. Quindi, dopo aver ottenuto un fuzzy set qualitativo, se si trova una soddisfacente valutazione numerica possiamo associare a P(x) un fuzzy set φ.

Un problema importante nell'ambito dell'Architettura è di confrontare e valutare un insieme U di progetti al fine di fornire dei criteri di scelta per gli amministratori. L'insieme U può essere finito o anche infinito, se i progetti dipendono da valori di parametri reali.

Ogni progetto deve soddisfare un insieme di m requisiti detti "*fattibilità*", che indichiamo con $F_1, F_2, \ldots, F_m$. In definitiva, ad ogni fattibilità F_i si associa la funzione enunciativa $P_i(x)$ = "il progetto x verifica la F_i". In (Ferri, Maturo, 1998, 1999) è stato misurato il soddisfacimento di ogni fattibilità con punteggi appartenenti all'intervallo [0,1] assegnati ad un insieme di n *criteri*.

Ossia, per ogni F_i si considera un fuzzy set qualitativo α_i che ad ogni $x \in U$ associa un vettore $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$ appartenente a $S = [0,1]^n$.

Si assume $V = (1, 1, \ldots, 1)$, $F = (0, 0, \ldots, 0)$ e come ordinamento la relazione d'ordine parziale usuale in S. Se v_i è la funzione di valutazione numerica su S rispetto ad F_i allora il fuzzy set $\varphi_i = v_i \circ \alpha_i$ determina i gradi in cui i progetti soddisfano la fattibilità F_i. Si ottiene allora una funzione vettoriale $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)$ definita in U ed a valori in $[0,1]^m$.

Se w è una valutazione numerica su $[0,1]^m$, ottenuta tenendo conto del peso di ogni fattibilità, la funzione composta $\psi = w \circ \varphi$ è un fuzzy set su U.

Per ogni $x \in U$, $\psi(x)$ è il grado in cui il progetto x soddisfa l'insieme delle fattibilità.

Le iperoperazioni di Corsini (1994) associate, rispettivamente, ai φ_i ed a ψ forniscono, rispettivamente, l'insieme dei progetti di valore compreso fra due progetti dati, rispettivamente, riguardo alla fattibilità F_i o al complesso di tutte le fattibilità.

4. Fuzzy sets, iperstrutture e classificazioni

Un altro tipo di incertezza riguarda le relazioni fra gli elementi di un universo statistico e la loro suddivisione in classi.

Poniamo $J = \{1, 2,\ldots, n\}$, $I =\{1, 2,\ldots, c\}$. Sia $U = \{O_j\}_{j\in J}$ un insieme con n elementi, ad esempio quello degli edifici di una data città.

Si vogliono classificare gli elementi di U in c classi "*omogenee*" C_i, $i\in I$. Nel caso degli edifici ciò è importante per stabilire i prezzi degli affitti, la tassazione, i prezzi di vendita, etc. Ogni classificazione di U in c classi è rappresentata con una matrice $M = [m_{ij}]$, $i\in I$, $j\in J$, con c righe (una per ogni classe) ed n colonne (gli elementi di U). Se la classificazione è crisp allora $m_{ij} = 1$ se $O_j\in C_i$ e $m_{ij}=0$ se $O_j\notin C_i$. Se la classificazione è fuzzy allora $m_{ij}\in[0,1]$ ed è "*il grado di appartenenza*" di O_j a C_i. In ogni caso la somma degli elementi di ciascuna colonna di M è uguale ad 1.

Per effettuare la classificazione si individuano le caratteristiche più importanti $K_1, K_2,\ldots, K_s$, il più possibile indipendenti, degli elementi di U. Poi, per ogni K_r, $r\in\{1, 2,\ldots, s\}$, e per ogni oggetto O_j si determina un numero reale non negativo a_{rj} che rappresenta la misura in cui O_j soddisfa la caratteristica K_r. Allora ogni $O_j\in U$ è rappresentato da un vettore $(a_{1j}, a_{2j},\ldots, a_{sj})$ di R^s. Si introduce quindi una metrica in R^s ed una funzione obiettivo L non negativa, da minimizzare, che dipende dalla matrice M e dalle distanze fra gli elementi di U.

Alcuni algoritmi per ottenere la matrice M che minimizza L si trovano in (Bezdek 1981), ed in (Ross 1997). Alcuni criteri per assegnare le distanze sono descritti nei lavori citati ed in (Beltrami 1977).

Supponiamo, ora, che sia stata determinata una classificazione C di U in c classi di matrice M. Mostriamo che C individua un ipergruppo commutativo chiuso, che in casi particolari può essere un join space.

Infatti la riga generica C_i di M può essere interpretata come il fuzzy set, di universo U, $\varphi_i: O_j\in U\rightarrow m_{ij}\in[0,1]$. Si può allora associare a φ_i l'iperoperazione di Corsini:

$$\forall a,b\in U,\ a\bullet_i b = \{z\in U: \min\{\varphi_i(a), \varphi_i(b)\} \leq\varphi_i(z)\leq \max\{\varphi_i(a), \varphi_i(b)\}\}.$$

Si ha quindi che $(U,\bullet_i)$ è un join space chiuso.

Introduciamo la seguente iperoperazione in U

$$\forall a,b\in U,\ a\bullet b = \cap_{i\in I}\, a\bullet_i b.$$

Si può verificare che $H=(U,\bullet)$ è un *ipergruppo commutativo chiuso*, che in generale non è un join set.

Nel caso particolare in cui si considerano partizioni crisp, indicato con C(a) la classe della classificazione contenente a, si può verificare che l'iperoperazione "$\bullet$" si riduce alla: $\forall a,b\in U$, $a\bullet b = C(a)\cup C(b)$.

Adottando una terminologia analoga a quella dei join set euclidei chiamiamo H-segmento di estremi a, b l'iperprodotto a•b, H-triangolo di vertici a, b, c l'iperprodotto triplo a•b•c e così via. Gli H-segmenti, gli H-triangoli e, in generale, gli H-poligoni hanno interessanti interpretazioni pratiche. Ad esempio, se gli elementi di U sono edifici, l'H-segmento di estremi a, b è formato da edifici con prezzi di affitto, tassazione, etc., vincolati da quelli di a e di b.

Bibliografia

Beltrami E.J., (1977), *Models for Public Systems Analysis*, Academic Press, New York

Bezdek J., (1981), *Pattern recognition with fuzzy objective function algorithms*, Plenum Press, New York

Corsini P., (1993), *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore

Corsini P., (1994), *Join spaces, power sets, fuzzy sets,* Proc. of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Jasi, Romania

Corsini P., Leoreanu V., (2003), *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluver Academic Publishers, London

Doria S., Maturo A., (1995), *An Hyperstructures of Conditional Events for artificial intelligence,* in "Mathematical models for handling partial knowledge in artificial intelligence", Plenum press, New York, pagg.201-208

Doria S., Maturo A., (1996), *Hyperstructures and geometric spaces associated to a family of events*, in Rivista di Matematica Pura e Applicata, n 19, pp.125-137

Fadini A., (1979), Introduzione alla teoria degli insiemi sfocati, Liguori Editore, Napoli

Ferri B, Maturo A., (1998), *An Application of the Fuzzy Set Theory to Evaluation of Urban Project*, in: New Trends in Fuzzy Systems, pp. 82-91, World Scientific, Singapore

Ferri B., Maturo A., (1999), *Fuzzy Classification and Hyper-structures: An Application to Evaluation of Urban Project*, in: Classification and Data Analysis, pp. 55-62, Springer-Verlag, Berlin

Marty F., (1934), *Sur une généralisation de la notion de group*, IV Congres des Mathématiciens Scandinave, Stockholm

Maturo A., (1997a), *Probability assessments on hyperstructures of events*, in Proceedings of the 4th workshop on uncertainty processing. pp. 111-119, Prague, January 22-25, 1997

Maturo A., (1997b), *On some hyperstructures of conditional events*, in Proceedings of Conference on Algebraic Hyperstructures and Applications ‘96, pp. 115-132, Prague, September 1-9, 1996

Maturo A., (1997c), *Conditional events, conditional probabilities and hyperstructures*, in Proceedings EUFIT ’97, September 8-11, pp. 1509/1513, Aachen, Germany

Prenowitz W., Jantosciak J., (1979), *Join geometries,* Springer-Verlag VTM

Ross T. J., (1997), *Fuzzy Logic with engineering applications*, MacGraw Hill